• $x \mapsto x^2(\cos(\frac{1}{x})-1)$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ (produit et composée de fonctions continues) donc f est continue sur $]\frac{1}{\pi}, +\infty[$.

Continuité de f en $x_0 = 0$:

• $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x\sin(\frac{1}{x})$.

On a : $\forall\, x<0$: $-1 \le \sin(\frac{1}{x}) \le 1$ d'où $x \le x\sin(\frac{1}{x}) \le -x$

Et comme $\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

• $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -2x^2 = 0$

on a : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ donc f est continue en $x_0 = 0$.

Continuité de f en $x_0 = \frac{1}{\pi}$:

$$\lim_{x\to \frac{1}{\pi}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{\pi}^-} -2x^2 = \frac{-2}{\pi^2}$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{\pi}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{\pi}^+} x^2(\cos(\frac{1}{x})-1) = \frac{1}{\pi^2}(\cos\pi - 1) = \frac{-2}{\pi^2}$$

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{\pi}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{\pi}^+} f(x) = f(\frac{1}{\pi})$ donc f est continue en $x_0 = \frac{1}{\pi}$.

Conclusion : f est continue sur $\mathbf{R}$.

Solution 6 :

1°/a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} 3\sqrt{4x^2+2x+1} + 2x - 3$

$$= \lim_{x\to -\infty} 3\sqrt{x^2(4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})} + 2x - 3 = \lim_{x\to -\infty} 3|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} + 2x - 3$$

$$= \lim_{x\to -\infty} -3x\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} + 2x - 3 = \lim_{x\to -\infty} x(-3\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} + 2 - \frac{3}{x}) = +\infty$$